# Leçon 155 - Exponentielle de matrices. Applications.

## Extrait du rapport de jury

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut savoir justifier précisément la convergence de la série exponentielle.
Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées en distinguant les cas réel et complexe. Il est souhaitable de connaître l'image par exponentielle de certains sous ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou anti-symétriques).
La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle en lien avec la décomposition polaire peut s'avérer utile dans l'étude de sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.
Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidates et candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

## Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 155 intitulée "Exponentielle de matrices. Exemples et applications.". Les excellentes propriétés de l'exponentielle réelle puis complexe suggèrent son utilisation en algèbre linéaire avec un cadre plus général (le développement en série entière restant valable) notamment dans le cadre de la résolution des systèmes d'équations différentielles à coefficients constants. Des propriétés analogues peuvent alors être espérées via le calcul fonctionnel même si certaines propriétés ne demeurent cependant pas... Le but de cette leçon sera de fournir une étude sur l'exponentielle complexe ainsi que quelques applications.
Dans une première partie on s'intéresse à l'exponentielle matricielle avec des résultats généraux. Tout d'abord on donne des généralités sur les séries matricielles. Pour cela, on introduit le rayon spectral ainsi que quelques résultats sur ce dernier. Ce rayon spectral nous sera utile pour énoncer une condition de convergence (ou non) d'une série exponentielle ainsi que des résultats sur sa somme. Dans un deuxième point on rentre dans le sujet avec la définition et les premières propriétés de l'exponentielle matricielle. On donne en premier lieu la définition de l'exponentielle d'une matrice ainsi que des résultats algébriques comme la commutativité sous certaines hypothèses, la conjugaison et l'inversibilité. Cependant tous les résultats usuels de l'exponentielle complexe ne sont pas conservés, comme par exemple la commutativité générale. Dans un dernier point, on donne des calculs pratiques de l'exponentielle avec tout d'abord le cas des matrices nilpotentes puis des matrices diagonalisables. L'objectif étant d'étendre ces résultats grâce à la décomposition de Dunford. On conclut enfin cette partie avec la détermination des antécédents de l'identité par l'exponentielle matricielle.
Dans une deuxième partie on s'intéresse à l'étude analytique de la fonction exponentielle. En premier lieu, on s'intéresse à la régularité de l'exponentielle matricielle : celle-ci est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Enfin, il est possible de montrer qu'elle réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ sur un voisinage de $I_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dans un deuxième point on s'intéresse désormais à sa surjectivité et son injectivité. Dans le cas général, l'exponentielle matricielle n'est ni surjective ni injective. Il nous faut donc restreindre nos ensembles de départ et d'arrivée et c'est en ce sens qu'on introduit la fonction logarithme matriciel car l'exponentielle matricielle réalise une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur les matrices unipotentes et dont l'inverse est cette fonction logarithme matriciel. On montre ensuite que l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Enfin on termine ce point en s'intéressant plus spécifiquement aux matrices réelles avec des conditions pour appartenir à l'image de l'exponentielle matricielle ainsi que la détermination de cette même image. Dans un dernier point on donne quelques restrictions remarquables de l'exponentielle matricielle. Tout d'abord l'injectivité sur l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ainsi qu'un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathcal{C})$ en théorème 50 et qui reste vrai dans le cas réel.
Finalement, on termine cette leçon par une dernière partie consacrée à des applications. Tout d'abord dans un premier point on s'intéresse aux systèmes d'équations différen-

tielles à coefficients constants. On donne la forme des solutions pour un problème de Cauchy et ensuite on donne un exemple de résolution de système différentielle dans le cas où $A$ est diagonalisable. Enfin, dans un deuxième point on donne quelques résultats topologiques avec la connexité par arcs de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ainsi que la décomposition polaire dans le cas réel et complexe.

# Plan général



# Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère le corps commutatif $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n$ un entier naturel non nul, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u$ l'endomorphisme dont la matrice $A$ est canoniquement associée.

# I Exponentielle matricielle

## I.1 Généralités sur les séries matricielles

**Définition 1 : Rayon spectral d'une matrice [Rombaldi, p.759] :**
On appelle **rayon spectral de** $A$ la quantité $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$.

**Proposition 2 : [Rombaldi, p.759]**
Pour tout entier naturel $k$, on a $\rho\left(A^k\right) = \rho(A)^k$.

**Proposition 3 : [Rombaldi, p.759]**
Pour toute norme d'algèbre $N$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\rho(A) \leq N(A)$.

**Théorème 4 : Théorème de Gelfand [Rombaldi, p.659] :**
Si $N$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors on a $\rho(A) = \lim_{n \to +\infty} N\left(A^n\right)^{\frac{1}{n}}$.

**Théorème 5 : [Rombaldi, p.759]**
Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $f$ sa fonction somme.
$*$ Si $\rho(A) < R$, alors $\sum a_k A^k$ est normalement convergente.
$*$ Si $\rho(A) > R$, alors $\sum a_k A^k$ est divergente.

**Théorème 6 : [Rombaldi, p.760]**
En reprenant les notations du théorème 5, on a $f(A) \in \mathbb{K}[A]$ (c'est-à-dire que $f(A)$ est un polynôme en $A$).

**Théorème 7 : [Rombaldi, p.760]**
Avec les notations du théorème 5, on a :
$*$ Si $\rho(A) = 0$, alors la fonction $\varphi : t \longmapsto f(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
$*$ Si $0 < \rho(A) < R$, alors la fonction $\varphi : t \longmapsto f(tA)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{R}{\rho(A)}; \frac{R}{\rho(A)}\right[$.
Dans les deux cas, on a $\varphi'(t) = Af'(tA)$.

## I.2 Définitions et premières propriétés

**Proposition 8 : [Rombaldi, p.761]**

La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ ayant un rayon de convergence infini, la série $\sum \frac{1}{k!} A^k$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Définition 9 : Exponentielle d'une matrice [Rombaldi, p.761] :**

On appelle **exponentielle de** $A$ (et on note $\exp(A)$ ou encore $e^A$) la somme de la série $\sum \frac{1}{k!} A^k$.

**Proposition 10 : [Rombaldi, p.761]**

On a $e^A \in \mathbb{K}[A]$ et donc $Ae^A = e^A A$.

**Proposition 11 : [Rombaldi, p.761]**

Pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$.

**Proposition 12 : [Rombaldi, p.762]**

L'application $\varphi : t \longmapsto e^{tA}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

**Théorème 13 : [Rombaldi, p.762]**

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a l'égalité $\det\left(e^M\right) = e^{\mathrm{Tr}(M)} \neq 0$.
En particulier, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det\left(e^M\right) = e^{\mathrm{Tr}(M)} > 0$.

**Théorème 14 : [Rombaldi, p.764]**

La matrice $e^A$ est inversible et d'inverse $e^{-A}$.

**Théorème 15 : [Rombaldi, p.764]**

Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a l'équivalence :

$$(AB = BA) \iff \left(\forall t \in \mathbb{R},\ e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}\right)$$

**Corollaire 16 : [Rombaldi, p.764]**

Pour tout entier naturel $k$, on a $e^{kA} = \left(e^A\right)^k$.

**Exemple 17 : [Rombaldi, p.761]**

$*$ $\exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}) = I_n$.
$*$ $\exp(I_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} I_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) I_n = eI_n$.

**Remarque 18 :**

La commutativité est primordiale pour avoir $e^{A+B} = e^A e^B$.
En effet, si l'on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors on a :

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } e^{A+B} = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## I.3 Calcul pratique de l'exponentielle

**Proposition 19 : [Rombaldi, p.761]**

Si $A$ est nilpotente d'indice $p > 0$, alors $e^A = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k$.

**Proposition 20 : [Rombaldi, p.761]**

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $e^D = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n})$.

**Corollaire 21 : [Rombaldi, p.761]**

Si $A$ est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$, alors $e^A = Pe^D P^{-1}$.

**Lemme 22 : [Rombaldi, p.608]**

Soient $r$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ et $Q_1, ..., Q_p$ les polynômes définis par $Q_k = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r P_j$.

Si les polynômes $P_k$ sont deux à deux premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$, alors les polynômes $Q_k$ sont premiers entre eux dans leur ensemble et pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, $P_k$ et $Q_k$ sont premiers entre eux.

**Lemme 23 : Lemme des noyaux [Rombaldi, p.609] :**

Soient $r$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, $P_1, ..., P_r$ des polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et $P = \prod_{i=1}^r P_k$.
On a alors la décomposition $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}(P_i(u))$ et les différents projecteurs $\pi_k : \mathrm{Ker}(P(u)) \longrightarrow \mathrm{Ker}(P_k(u))$ sont des éléments de $\mathbb{K}[u]$.

**Théorème 24 : Décomposition de Dunford [Rombaldi, p.613]**

Si le polynôme caractéristique de $u$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple $(d, n)$ d'endomorphismes de $E$ tel que $d$ est diagonalisable, $n$ est nilpotente, $d$ et $n$ commutent et $u = d + n$.
De plus, $d$ et $n$ sont des polynômes en $u$.

**Corollaire 25 : [Rombaldi, p.762 + 766]**

Si $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors on a l'équivalence :

$$(A \text{ est diagonalisable}) \iff (e^A \text{ est diagonalisable})$$

**Corollaire 26 : [Rombaldi, p.765]**
Si $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors on notant $D+V$ sa décomposition de Dunford, on a $e^A = e^D e^V = e^D \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} V^k$ et la décomposition de Dunford de $e^A$ est $e^D + e^D\left(e^V - I_n\right)$ avec $e^D$ diagonalisable et $e^D\left(e^V - I_n\right)$ nilpotente.

**Théorème 27 : [Rombaldi, p.779]**
On a l'équivalence :

$$\left(e^A = I_n\right) \iff \left(A \text{ diagonalisable et } \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq 2i\pi\mathbb{Z}\right)$$

**Exemple 28 :**
Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a alors $A = aI_3 + bN + cN^2$ et donc :

$$e^A = e^{aI_3} e^{bN + cN^2} = e^a \begin{pmatrix} 1 & b & c + \frac{b^2}{2} \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# II Étude de la fonction exponentielle

## II.1 Régularité

**Théorème 29 : [Rombaldi, p.761]**
La fonction exp est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

**Théorème 30 : [Rombaldi, p.762]**
La fonction exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec :

$$\forall X, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ d(\exp)(X)(H) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{\substack{0 \le i,j \le k-1 \\ i+j=k-1}} X^i H X^j \right)$$

**Théorème 31 : [Rombaldi, p.774]**
La fonction exp réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un voisinage de $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ sur un voisinage de $I_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

## II.2 Injectivité et surjectivité

**Remarque 32 :**
$*$ La fonction exp : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas surjective car les images ont toutes un déterminant strictement positif.
$*$ La fonction exp : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas injective car pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $e^{A_k} = I_2$ avec $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k\pi \\ -2k\pi & 0 \end{pmatrix}$.

**Définition 33 : Logarithme matriciel [Rombaldi, p.767] :**
On appelle **logarithme matriciel** l'application :

$$\operatorname{Ln} : \left| \begin{array}{ccc} \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tq } \rho(H) < 1\} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ I_n + H & \longmapsto & \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} H^k \end{array} \right.$$

**Remarque 34 : [Rombaldi, p.767]**
$*$ $\operatorname{Ln}(I_n + A)$ est un polynôme en $A$.
$*$ On a en particulier $\operatorname{Ln}(I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ et pour toute matrice nilpotente $N$ d'indice de nilpotence $q \geq 2$, on a $\operatorname{Ln}(I_n + N) = \sum_{k=1}^{q-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$.

On note désormais $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices nilpotentes et $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices unipotentes (c'est-à-dire des matrices telles que $A - I_n$ soit nilpotente).

**Développement 1 : [A] [cf. ROMBALDI]**

**Lemme 35 : [Rombaldi, p.767]**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Si $\rho(M) < 1$, alors $e^{\operatorname{Ln}(I_n + M)} = I_n + M$.

**Lemme 36 : [Rombaldi, p.767]**
Pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $e^N \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a l'égalité $\operatorname{Ln}\left(e^{tA}\right) = tA$.

**Théorème 37 : [Rombaldi, p.768]**
L'exponentielle matricielle réalise une bijection de $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$ d'inverse le logarithme matriciel.

**Remarque 38 :**
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la bijection induite est un homéomorphisme, car l'application exponentielle et sa réciproque sont polynomiales.

**Corollaire 39 : [Rombaldi, p.768]**
Pour tout nombre complexe $\lambda$ non nul et toute matrice $M \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $e^X = \lambda I_n + M$.

**Développement 2 : [B] [cf. ROMBALDI]**

**Lemme 40 : [Rombaldi, p.769]**
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable.
Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $Q(M)$ soit diagonalisable et $e^{Q(M)} = M$.

**Théorème 41 : [Rombaldi, p.769]**
Pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que l'on ait $e^{Q(M)} = M$ (autrement dit : l'exponentielle matricielle réalise une surjection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).

**Corollaire 42 : [Rombaldi, p.770]**
Soit $p$ un entier naturel non nul.
Pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ polynomiale en $M$ telle que $X^p = M$.

**Proposition 43 : [Berhuy, p.993]**
Si $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subseteq \mathbb{R}_+^*$, alors $A \in e^{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

**Proposition 44 : [Berhuy, p.994]**
Soit $B$ une matrice réelle inversible.
Si $B$ est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A} \end{pmatrix}$, alors $B \in e^{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

**Remarque 45 : [Berhuy, p.995]**
Cela entraîne que toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ (avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) est l'exponentielle d'une matrice réelle.

**Proposition 46 : [Berhuy, p.998]**
On a $e^{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \{M^2,\ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

**Corollaire 47 : [Berhuy, p.999]**
Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
$M$ est un carré dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, c'est une puissance $n$-ième pour tout entier naturel $n \geq 2$.

### II.3 Restrictions remarquables

**Proposition 48 : [Rombaldi, p.777]**
Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables.
Si $e^A = e^B$, alors $A = B$.

**Corollaire 49 :**
Si l'on note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors l'exponentielle matricielle est injective sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

On note désormais $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices symétriques réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}, << Sx; x >> 0\}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives (et on fait de même avec les matrices complexes hermitiennes).

**Développement 3 : [cf. ROMBALDI]**

**Théorème 50 : [Rombaldi, p.771 + 780]**
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

**Théorème 51 : [Rombaldi, p.]**
L'exponentielle matricielle induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

# III Applications

## III.1 Résolution de systèmes différentiels

Dans toute cette sous-partie, on considère $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue.

**Proposition 52 : [Deschamps, p.1060]**
Si $A$ est constante, alors les solutions de l'équation $y' = Ay$ sont de la forme $y(t) = e^{tA}C$ avec $C \in \mathbb{R}^n$.

**Corollaire 53 : [Deschamps, p.1060]**
Si $A$ est constante, alors pour tout $t_0, y_0 \in I \times \mathbb{R}^n$, l'unique solution du problème de Cauchy :

$$PC_{(t_0,y_0)} : \left\{ \begin{array}{l} y' = Ay \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

est la fonction $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \exp((t-t_0)A)y_0 \end{array} \right.$.

**Remarque 54 :**
Pour faciliter l'étude de $y' = Ay$, on peut (lorsque c'est possible), diagonaliser ou trigonaliser $A$ pour obtenir un système plus simple à résoudre.

**Exemple 55 : [Gourdon, p.383]**
Les solutions complexes du système différentiel :

$$\begin{cases} x' &= x + z \\ y' &= -y - z \\ z' &= 2y + z \end{cases}$$

sont les fonctions $t \longmapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \alpha e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$.

### III.2 Topologie

**Développement 4 : [3] [cf. ROMBALDI]**

**Proposition 56 : [Rombaldi, p.770]**
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.

**Proposition 57 : Décomposition polaire [Rombaldi, p.741] :**
La multiplication matricielle induit les homéomorphismes suivants :

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

**Corollaire 58 :**
* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.
* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$.

# Remarques sur la leçon

— On peut s'intéresser à la décomposition de Jordan pour calculer l'exponentielle d'une matrice à partir de l'exponentielle de chaque bloc de Jordan.

# Liste des développements possibles

— Surjectivité de l'exponentielle matricielle.

— Homéomorphisme de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

# Bibliographie

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Grégory Berhuy, *Algèbre : le grand combat*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.